VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ
BRNO UNIVERSITY OF TECHNOLOGY

FAKULTA STROJNÍHO INŽENÝRSTVÍ
ÚSTAV AUTOMATIZACE A INFORMATIKY

FACULTY OF MECHANICAL ENGINEERING
INSTITUTE OF AUTOMATION AND COMPUTER SCIENCE

Přesnost nepřímých měření

Accuracy of Indirect Measurement

TITLE

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE
BACHELOR'S THESIS

AUTOR PRÁCE **Zdeněk Urbánek**
AUTHOR

VEDOUCÍ PRÁCE **Ing. František Vdoleček, CSc.**
SUPERVISOR

BRNO 2009

ZADÁNÍ ZÁVĚREČNÉ PRÁCE

Vysoké učení technické v Brně, Fakulta strojního inženýrství

Ústav automatizace a informatiky
Akademický rok: 2008/09

ZADÁNÍ BAKALÁŘSKÉ PRÁCE

student(ka): Urbánek Zdeněk

který/která studuje v **bakalářském studijním programu**

obor: **Aplikovaná informatika a řízení (3902R001)**

Ředitel ústavu Vám v souladu se zákonem č.111/1998 o vysokých školách a se Studijním a zkušebním řádem VUT v Brně určuje následující téma bakalářské práce:

Přesnost nepřímých měření

v anglickém jazyce:

Accuracy of Indirect Measurement

Stručná charakteristika problematiky úkolu:

V technické praxi zaujímají nepřímé metody měření značný podíl, ale současně jsou spojeny s podstatně složitějším zajištěním jejich přesnosti – výslednou nejistotou měření.

Cíle bakalářské práce:

Práce se zaměřuje na základní modely typických nepřímých měření a metodiku analýzy jejich nejistot. Součástí je rovněž jednoduchý model, přibližující vybraný charakteristický případ potřebám výuky.

Doporučená osnova práce:
1. Nepřímá měření
2. Přesnost měření a jeho nejistoty
3. Typická nepřímá měření a analýza jejich nejistot
4. Model vybraného příkladu

Seznam odborné literatury:

CHUDÝ, V.; Palenčár, R.; Kureková, E.; Halaj, M.; Meranie technických veličín : 1.vydání Bratislava : Vydavatelstvo STU, 1999. 688s. ISBN 80-227-1275-2.

KOSTÚR K.; Laciak M.; Truchlý M.; Sytémy nepriameho merania : 1. vydání Košice: Reprocentrum Košice, 2005. 173 s. ISBN 80-8073-273-6.

PALENČÁR R.; Modely merania při zabezpečovaní kvality. :1. vydání Bratislava: Vydavatelstvo STU, 1998. 140 s. ISBN 80-227-1170-5.

Související normy a předpisy

Vedoucí bakalářské práce: Ing. František Vdoleček, CSc.

Termín odevzdání bakalářské práce je stanoven časovým plánem akademického roku 2008/09.

V Brně, dne 27. 11. 2008

L.S.

VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ
FAKULTA STROJNÍHO INŽENÝRSTVÍ
DĚKANÁT
14

Šeda

doc. RNDr. Ing. Miloš Šeda, Ph.D.
Ředitel ústavu

Vz.

doc. RNDr. Miroslav Doupovec, CSc.
Děkan fakulty

LICENČNÍ SMLOUVA

Na tomto místě je vložena licenční smlouva.

ABSTRAKT

Tato bakalářská práce se zaměřuje na základní modely nepřímých měření a metodiku analýzy nejistot. Součástí je rovněž jednoduchý model, přibližující vybraný charakteristický případ pro potřeby výuky.

ABSTRACT

This bachelor's thesis survey on frame indirect measurement and philosophy analyses uncertainties. Part of is as well simple model, approximating choice characteristic case for needs education.

KLÍČOVÁ SLOVA

Metrologie, měření, přesnost, nepřímá měření, nejistoty, model vybraného příkladu

KEYWORDS

Metrology, measurement,Accuracy, indirect measurement, uncertainties, model choice instance

PODĚKOVÁNÍ

Na tomto místě bych chtěl poděkovat všem, kteří mi byli nápomocní při zhotovování bakalářské práce. Především děkuji vedoucímu mé bakalářské práce Ing. Františkovi Vdolečkovi, CSc. za cenné rady a připomínky.

OBSAH

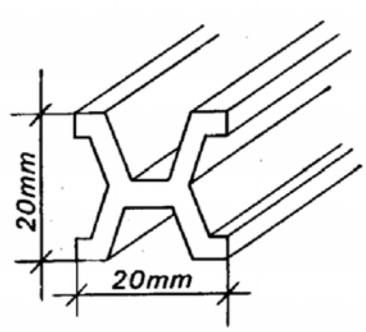
1 ÚVOD

Měření je činnost člověka již od nepaměti a jeho každodenní aplikace si lidé ani neuvědomují. Historie měření je přímo propojená s vývojem člověka a spadá do období téměř před 5 tisíciletí a to do oblastí prvních civilizací a to Sumeru a Mezopotámie, kde se také našlo nejstarší zachované zpodobnění míry (délková míra) na kamenné soše Gudey z Lagaše.

V období středověku v naší zemi bylo měření, míry, váhy velmi roztříštěné a byly velmi ovlivněné národním, regionálním rozdělením a také městy. Stávalo se, že města přímo sousedící měla různou míru. O větší úpravy v měření a vážení se zasadil Přemysl Otakar II a to rozkazem z roku 1268, kdy obnovil všechny míry a váhy po celé zemi a nařídil jejich vzory cejchovat královským znamením v rámci měst. Dále také Karel IV. A Václav IV. se snažili mimo jiné posilovat živnosti a řemesla právem míle. Ve 14 století existovali v městech měřiči a vážní, kteří dohlíželi poctivost tržení. V dané době se měřilo jen minimum veličin a to délka, plocha, objem a hmotnost.

V novodobém středověku je důležitým datem rok 1797 kdy byl uložen do státního archivu Francouzské republiky prototyp metru. Dnešní model metrologie, který známe se datuje k přijetí metrické soustavy ze dne 20. května 1875 a to v Paříži, kde byl podepsán dokument Metrická konvence (Dohoda o metru) a podepsalo ji 18 států, dnes do této metrické konvence patří 51 států. Rakousko-Uhersko (pod kterým byla naše země) podepsalo tuto metrickou konvenci dne 20. května 1875 a ratifikována byla až dne 31. prosince 1875. Po rozpadu mocnářství bylo potvrzeno členství ČSR v roce 1923. Novodobé republice ČR bylo potvrzeno členství v roce 1993. Touto problematikou se nyní zaobírá tzv. Úřad pro technickou normalizaci, metrologii a státní zkušebnictví.

Dnes se přechází při technických měření k novým metodám k určování odchylek. Původní chyby měření jsou nahrazovány nejistotami měření (v rámci mezinárodních i státních norem ISO, BIPM, OIM, TPM 005x). Nástup nové metodiky zpracování výsledků měření se zařazuje do období začátku 90 let 20 století. V roce 1993 byl vydán dokument (směrnice) pod názvem Guide to Expression of the Uncertainty of Measurement. U nás nové řešení prezentují hlavně Technické předpisy metrologické TPM řady 005x. Důležitost zabezpečování kvality měřících zařízení a měřících procesů je součástí norem řady ISO 9000:2000.



Obr. 1.1 Mezinárodní prototyp metru

Etalonem byla platinová tyč délky jednoho metru zhotovená s přesností 0,01 mm. Mezinárodní metr byl pak definován materiálně jako vzdálenost dvou středních rysek na prototypu, uloženém v Mezinárodním úřadě pro míry a váhy v Sèrves u Paříže, při teplotě 0°C, tlaku jedné atmosféry, v horizontální poloze a při podepření ve dvou bodech nejmenšího průhybu.

2 MĚŘENÍ, METROLOGIE

2.1 Základní pojmy používané v měření

Metrologie je vědní obor, jehož náplní jsou znalosti o měření. Podle obsahu se metrologie dělí na 5 oborů:

- Metrologie měřících (měrových) jednotek
- Metrologie měření
- Metrologie měřidel
- Metrologie měřících osob
- Metrologie fyzikálních a technických konstant.

Další dělení:

- Teoretická metrologie
- Aplikovaná metrologie

Podle náplně se metrologie dělí na:

- Metrologie síly
- Metrologie tlaku
- Metrologie délek
- Metrologie úhlů
- Metrologie elektrických veličin.

Měření – soubor úkonů potřebných pro stanovení hodnoty určité veličiny.

Princip měření je fyzikální jev nebo souhrn fyzikálních jevů, na kterých je založeno příslušné měření, např. Dopplerův jev pro měření rychlosti.

Měřicí metoda – obecný popis praktických a teoretických operací použitých při provádění měření podle daného principu, obvykle je způsob porovnání používaný při měření.

Postup měření – sled úkonů nutných k provedení měření.

Kalibrace (starší název cejchování) – soubor úkonů, hledající za určených podmínek vztah mezi hodnotami udávanými měřicím přístrojem (nebo měřicí sestavou) a mezi příslušnými známými hodnotami měřené veličiny. Výsledek kalibrace dovoluje odstranit chyby údajů měřicího přístroje a přiřadit hodnoty měřené veličiny k měřicím značkám libovolných stupnic. Kalibrací je možno určovat také jiné metrologické vlastnosti. Výsledek kalibrace se často vyjadřuje kalibrační křivkou. Mnohdy může být výsledek kalibrace vyjádřen i jako korekční graf. Původní obsah termínu kalibrace znamená přiřazení hodnot měřené veličiny údaji přístroje, obvykle vyjádřenému v konvenčních jednotkách (dílcích). Současný význam termínu kalibrace je mnohem širší, vyjadřuje zjišťování všech metrologických vlastností.

Nekorigovaný výsledek (hrubý výsledek) měření je výsledek měření před odstraněním předpokládaných systematických chyb. Získáme jej výpočtem aritmetického průměru z indikací. Jedná-li se o jedinou indikaci, je hrubý výsledek totožný s indikací.

Korigovaný výsledek (opravený výsledek) – výsledek měření, který z nekorigovaného výsledku získáme provedením potřebných korekcí, odpovídajících předpokládaným systematickým chybám. K tomuto výsledku bývá zpravidla připojován údaj o nejistotě měření.

Přesnost měření – těsnost (souhlasnost) shody mezi výsledkem měření a (konvenčně) pravou hodnotou měřené veličiny. Název přesnost patří spíš do běžné mluvy než do metrologické terminologie, kde se používal v mnoha různých významech. Z těchto důvodů se doporučuje tento název nepoužívat; v případě použití musí být obsah pojmu blíže vymezen.

2.2 Metody měření

Do metrologie patří také znalosti o měření, tedy o postupech jak měřit, o metodách měření, teorii chyb, zpracování výsledků i funkční požadavky kladené na měřidla a jejich vlastnosti.

Přímé měření – měřicí metoda, kterou se hodnota měřené veličiny získá přímo, aniž by bylo nutno provádět dodatečné výpočty založené na funkční závislosti měřené veličiny na jiných skutečně naměřených veličinách: Za přímou měřicí metodu se považuje i případ, kdy stupnice měřidla je opatřena konvenčními hodnotami (dílky, %), vázanými na příslušné hodnoty měřené veličiny pomocí tabulky nebo grafu. Měřicí metoda zůstává přímou i v případě, že jsou nutná dodatečná měření na stanovení hodnot ovlivňujících veličin, aby se mohly provést příslušné korekce. Příklady přímé metody: měření hmotnosti na vahách se stupnicí nebo rovnoramenných, měření délky pravítkem a teploty skleněným teploměrem nebo měření tlaku deformačním tlakoměrem. Dále je můžeme členit na:

- **Porovnávací –** porovnání veličin stejného druhu, čárkové měřidlo
- **Vyrovnávací –** účinek je vyrovnán, vyvážen, veličinou stejného druhu
- **Nahrazovací –** veličina je nahrazena jinými známými hodnotami téže veličiny
- **Přemisťovací –** přemisťování veličiny a známých hodnot téže veličiny

Nepřímé měření – je měřicí metoda, při níž se hodnota veličiny získává měřeními (prováděnými přímými měřicími metodami) jiných veličin, vázaných na měřenou veličinu známým vztahem. Příklady nepřímé metody: měření hustoty tělesa na základě měření hmotnosti a objemu, měření elektrického odporu na základě měření proudu a napětí, měření rychlosti na základě měření dráhy a času.

Dělení měření z jiného hlediska a to takto:

Měření etalonážní – je to měření s největší dnes dosažitelnou přesností. Slouží k definování jednotek k vědeckým účelům. Etalon je vlastně měřidlo, které je určeno uchovávání nebo k reprodukci měřící jednotky.

Měření ověřovací – při nich se ověřuje, zda měřidlo udává skutečné hodnoty měřené veličiny v určitých dovolených mezích.

Měření provozní – měření, při kterém ve smyslu definice jde o zjištění hodnot měřené veličiny.

2.3 Měřící jednotky

Soustavu SI tvoří sedm základních jednotek (tabulka 2.1), které spolu s jednotkami odvozenými (tabulka 2.2) vytvářejí ucelený systém jednotek. Kromě toho byly pro používání spolu s jednotkami SI schváleny i některé další jednotky stojící mimo soustavu SI (tabulka 2.3).

Tab. 2.1 Základní jednotky SI

Veličina	Základní jednotka	Značka
délka	metr	m
hmotnost	kilogram	kg
čas	sekunda	s
elektrický proud	ampér	A
termodynamická teplota	kelvin	K
látkové množství	mol	mol
svítivost	kandela	cd

Tab. 2.2 Příklady odvozených jednotek SI

Odvozená veličina	Odvozená jednotka	Značka
plocha	čtvereční metr	m^2
objem	krychlový metr	m^3
rychlost	metr za sekundu	$m \cdot s^{-1}$
zrychlení	metr za sekundu na druhou	$m \cdot s^{-2}$
úhlová rychlost	radián za sekundu	$rad \cdot s^{-1}$
úhlové zrychlení	radián za sekundu na druhou	$rad \cdot s^{-2}$
hustota	kilogram na krychlový metr	$kg \cdot m^{-3}$
intenzita magnetického pole	ampér na metr	$A \cdot m^{-1}$
hustota elektrického proudu	ampér na metr čtverečný	$A \cdot m^{-2}$
moment síly	newton metr	$N \cdot m$
intenzita elektrického pole	volt na metr	$V \cdot m^{-1}$
permeabilita	henry na metr	$H \cdot m^{-1}$
permitivita	farad na metr	$F \cdot m^{-1}$
měrná tepelná kapacita	joule na kilogram kelvin	$J \cdot kg^{-1} \cdot K^{-1}$
koncentrace látkového množství	mol na krychlový metr	$mol \cdot m^{-3}$
jas	kandela na čtvereční metr	$cd \cdot m^{-2}$

Tab. 2.3 Jednotky mimo SI, které jsou povoleny

Velličina	Jednotka	Značka	Hodnota v jednotkách SI
čas	minuta	Min	1 min = 60 s
	hodina	h	1 h = 60 min = 3600 s
	den	d	1 d = 24 h
rovinný úhel	stupeň	°	1° = (π/180) rad
	minuta	′	1′ = (1/60) ° = (π/10 800) rad
	vteřina	′′	1′′ = (1/60)′ = (π/648 000) rad
	nygrad [*)]	gon	1 gon = (π/200) rad
objem	litr	1 l	$1l = 1dm^3 = 10m^{-3}m^3$
hmotnost	tuna	t	$1t = 10^3 kg$

2.4 Mezinárodní metrologické organizace

- **Mezinárodní úřad pro váhy a míry –** (Bureau International des Poids et Mesures – **BIPM**), který vznikl spolu s Metrickou konvencí, sídlí v Sevresu Paříže a je vědeckou institucí.

- **Generální konference vah a měr –** (Conference Generale des Poids et Mesures – **CGPM**) je vrcholným orgánem Metrické konvence a schází se každé čtyři roky a tvoří ji delegáti členských zemí.

- **Mezinárodní výbor pro váhy a míry –** (Comite International des Poids et Mesures – **CIPM**), je řídícím orgánem mezi Generálními konferencemi, má 18 členů, volených na CGPM)

- **Poradní výbory –** (Comite Consutatif-**CC**x) jsou poradními výbory pro jednotlivé veličiny

- **Mezinárodní organizace pro legální metrologii –** (Organisation Internationale De Metrologie Legale – OIML) byla založena vroce 1955 a zabývá se speciálně legislativní zákonnou – stránkou metrologie.

2.5 Domácí metrologické organizace

- **ÚNMZ**= Úřad pro technickou normalizaci, metrologii a státní zkušebnictví
- **ČMI**= Český metrologický institut
- **ČIA**= Český institut pro akreditaci
- **ČNI**= Český normalizační institut
- **ČSN** (Česká technická norma)
- **Garant MPO** (ministerstvo průmyslu a obchodu)

3 CHYBY A NEJISTOTY MĚŘENÍ

Přesnost měření byla po dobu přibližně jednoho století vyjadřována pomocí chyby měření. Chyba měření je definována jako rozdíl mezi naměřenou hodnotou a pravou hodnotou (správnou hodnotou) měřené veličiny. Přibližně od 80 let 20 století se přesnost vyjadřuje nejistotou měření. Také nejistota měření se může vyjádřit v jednotkách měřené veličiny (čili jako „absolutní“), což je nejběžnější způsob vyjádření nejistoty. Druhou formou, kterou lze nejistotu měření vyjádřit, je forma relativní, čili poměr (absolutní) nejistoty k absolutní hodnotě naměřené veličiny. Pojem chyba měření ale ani po zavedení nejistoty měření není zcela opuštěn. V současné době se používá zejména v korekcích systematických (soustavných) chyb. Systematická chyba je chyba měření, která zůstává stejná při opakovaných měřeních. V některých případech (když je znám mechanismus jejího vzniku) je možné ji odstranit matematickou úpravou výsledku měření, tzv. korekcí.

Většina předpisů pracuje s pojmem nejistoty měření, popř. ho přesněji definuje a uvádí ho do dalších širších souvislostí. Důvody použití koncepce nejistot v praxi:

- Nejistota výsledku měření je kvantitativním ukazatelem jeho kvality.
- Vyjádření nejistoty výsledku měření umožňuje porovnat výsledky dosažené různými laboratořemi nebo v rámci jedné laboratoře, popř. porovnat výsledky s referenčními hodnotami uvedenými ve specifikacích nebo normách.
- Údaj o nejistotě výsledku kalibrace je neoddělitelnou součástí protokolu o kalibraci, kterou zákazník používá při vyhodnocení nejistot měření kalibrovaným měřidlem.
- Posouzení složek nejistoty současně určí, kterým aspektům měření, kalibrace nebo zkoušky je třeba věnovat pozornost, je-li třeba zlepšit stávající postupy.
- V praxi se musí vzít v úvahu stávající problémy hodnocení a udávání nejistot v různých oblastech měření, zkoušení a kalibrace.
- Laboratoř musí být schopna dokázat hodnotícímu orgánu, že nejistota byla správně vyhodnocena. Toho může dosáhnout vedením úplných záznamů o hodnocení složek nejistot, dokumentováním podrobných výpočtů a přijatých předpokladů. Kde je to možné, má být tento důkazový materiál doplněn výsledky mezilaboratorních porovnání. Je potřebné zavést systém řízení měřících procesů

3.1 Chyby měření

V praxi nejsou žádná měření, žádná měřicí metoda ani žádný přístroj absolutně přesné. Nejrůznější negativní vlivy, které se v reálném měřicím procesu vyskytují, se projeví odchylkou mezi naměřenou a skutečnou hodnotou sledované veličiny. Výsledek měření se tak vždy pohybuje v jistém „toleračním poli“ kolem skutečné hodnoty, ale téměř nikdy nenastává ideální ztotožnění obou hodnot. Přiblížení se k nulové velikosti odchylky vytváří velké potíže i u realizace etalonů. Výsledný rozdíl mezi oběma hodnotami je někdy tvořen i velmi složitou kombinací dílčích faktorů.

- **Skutečná hodnota**
- **Pravá hodnota**
- **Konvenčně pravá hodnota**
- **Naměřená hodnota**

Základním nedostatkem charakterizování přesnosti měření pomocí chyby měření je skutečnost, že „skutečnou“, „správnou“ nebo „pravou“ hodnotu měřené veličiny v praxi nikdy neznáme. Proto se při určování chyby měření nahrazovala „konvenčně pravou“ hodnotou, určenou měřením pomocí metody nebo přístroje podstatně přesnějšího, než měření, jehož chybu chceme určit. Od osmdesátých let minulého století se ale v měřicí technice postupně zavádí hodnocení přesnosti měření novým způsobem, ve kterém je klíčovým pojmem tzv. nejistota měření.

Chyby se vyjadřují v absolutních nebo relativních hodnotách. Jako chyba absolutní $\Delta(x)$ se označuje rozdíl mezi hodnotou naměřenou x_m a skutečnou x_s (vztah 3.1).

$$\Delta x = x_m - x_s \tag{3.1}$$

Podělí-li se absolutní chyba skutečnou hodnotou, dosáhne se poměrné vyjádření chyby, tj. chyba relativní $\delta(x)$. Platí tedy (vztah 3.2).

$$\delta(x) = \frac{\Delta(x)}{x_s} = \frac{x_m - x_s}{x_s} \tag{3.2}$$

3.1.1 Rozdělení chyb

Podle příčin vzniku dělíme chyby do tří skupin:

- systematické
- náhodné
- hrubé

Systematické chyby jsou při stálých podmínkách také stálé co do velikosti i znaménka a svým působením „systematicky“ ovlivňují výsledek měření. Ke stanovení jejich velikosti postačí zpravidla vztah (vztah 3.1). Tyto chyby zkreslují numerický výsledek měření zcela pravidelným způsobem; buď jej za stejných podmínek vždy zvětšují nebo vždy zmenšují a to bez ohledu na počet opakovaných měření. Často se navenek neprojevují a lze je odhalit až při porovnání s výsledky z jiného přístroje. Existují i systematické chyby s časovým trendem, způsobené stárnutím nebo opotřebováním měřicího přístroje. *Systematické chyby ovlivňují správnost.*

Náhodné chyby působí zcela nahodile, jsou těžko předvídatelné a nelze je vyloučit. Při opakování měření se mění jejich velikost i znaménko, jak odpovídá předpokládanému zákonu rozdělení. Pro určení jejich velikosti se vychází z opakovaných s použitím statistických metod odpovídajících patřičnému pravděpodobnostnímu modelu, reprezentovanému zákonem rozdělení příslušné náhodné chyby. V praxi velmi často jde o rozdělení normální – Gaussovo, které se používá ve většině aplikací. *Náhodné chyby ovlivňují pak přesnost výsledku.* Výsledek měření, stanovený ze souboru opakovaných měření realizovaných za stejných podmínek, je reprezentován aritmetickým průměrem získaným při n opakováních z hodnot x_1 , x_2 ,...x_i ,...x_n , (vztah 3.3) tj.

$$\overline{x} = \sum_{i=1}^{n} x_i \tag{3.3}$$

Náhodnou chybu v klasické teorii chyb nejčastěji zastupuje směrodatná odchylka výběrového souboru s(x), méně často směrodatná odchylka aritmetického průměru $s(\overline{x})$, získané z následujících vztahů (vztah 3.5) a (vztah 3.6) a potom směrodatná odchylka základního souboru (vztah 3.4)

$$\sigma(x) = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{N} \Delta^2(x_i)}{N}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{N} (x_i - \overline{x})^2}{N}} \tag{3.4}$$

$$s(x) = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} \Delta^2(x_i)}{n-1}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \overline{x})^2}{n-1}} \tag{3.5}$$

$$s(\overline{x}) = \frac{s(x)}{\sqrt{n}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \overline{x})^2}{n(n-1)}} \tag{3.6}$$

Obě směrodatné odchylky patřičným způsobem blíže charakterizují chování náhodných chyb. Směrodatná odchylka nebo její násobek vyjadřují jen hranici, kterou může náhodná chyba s určitou pravděpodobností překročit, nebo nepřekročit.

Hrubé chyby (označované jako vybočující nebo odlehlé hodnoty) jsou způsobeny výjimečnou příčinou, nesprávným zapsáním výsledku, náhlým selháním měřicí aparatury, nesprávným nastavením podmínek pokusu apod. Naměřená hodnota se při opakovaném měření značně liší od ostatních hodnot. Takové měření je třeba ze zpracování vyloučit, aby nezkreslovalo výsledek měření. Omezit riziko jejich výskytu lze důsledným dodržováním příslušných měřících postupů, podmínek měření a pozorností obsluhy.

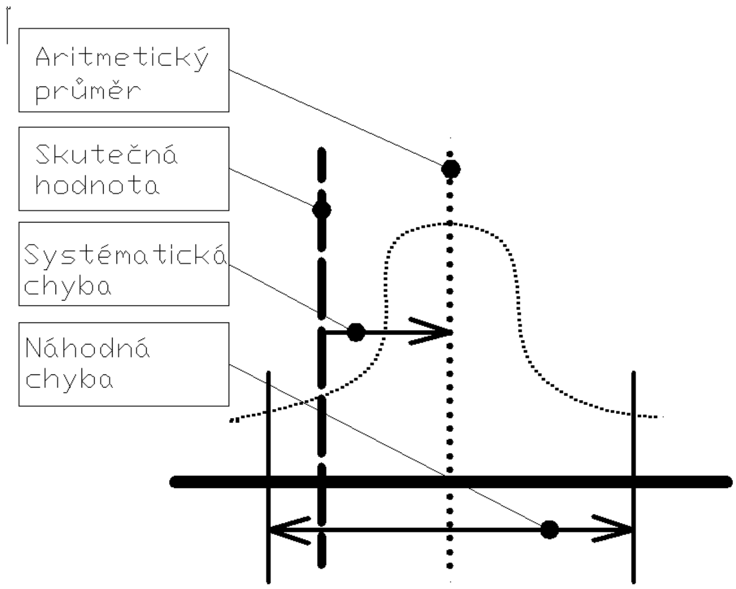
Výsledná chyba měření je vyjadřována jako součet systematické a náhodné složky, což lze zapsat (vztah 3.7)

$$\Delta(x) = |e| + |\varepsilon| \tag{3.7}$$

a její maximální hodnotu je možné odhadnout jako (vztah 3.8)

$$\Delta_{\max} = (\overline{x} - x_s) + 2s \tag{3.8}$$

Kde:
systematická složka je $e = \overline{x} - x_s$ a náhodná složka je ε = s , popř. ε = 2s. Součinitel rozšíření směrodatné odchylky souvisí s pravděpodobností pokrytí intervalu a typem rozdělení. Dvojka u Gaussova rozdělení přísluší často užívané 95% pravděpodobnosti.



Obr. 3.1 Vykreslení chyb

3.1.2 Zdroje chyb měření

Kompletní proces měření se setkává s řadou nedokonalostí a problémů, které se musí odrazit také ve výsledcích měření a chybách, podle možnosti vzniku je dělíme do řady zdrojů.

- *Chyby přístroje* – jsou to chyby, které plynou z nedokonalosti použitých měřících přístrojů, a to vznikající během výroby, montáže či opotřebování. Svou činnost zde sehrávají i další faktory jako např. stárnutí přístroje nebo změna charakteristik a parametrů stroje. Hodnoty některých chyb udává výrobce formou korekčních křivek, ostatní chyby udává jako maximální dovolenou chybu přístroje (se znaménkem ±) a nevztahují se na jeden přístroj, ale na celý typ přístroje.

- *Chyby instalace* – jsou to chyby vznikající z důvodu nedostatku zapojení, uložení a nebo nastavení měřidel ze vzájemného ovlivňování měřidel zapojených paralelně nebo sériově, chyby plynoucí z ovlivnění hodnot měřené veličiny měřidlem apod.

- *Chyby metody* – jsou chyby plynoucí z nedokonalosti použitých měřících metod, z použití přibližných hodnot fyzikálních konstant a nepřesně odpovídajících závislostí.

- *Chyby pozorování* – jsou chyby způsobené nedokonalostí smyslů pozorovatele nebo jeho nesoustředěním (schopnost zoomu oka).

- *Chyby vyhodnocení* – jsou chyby vznikající zpracováním naměřených hodnot (zaokrouhlení apod.)

- *Vlivy prostředí* – chyby, které vnáší do měření nedokonalost a nestálost parametrů prostředí, jejich kolísání a negativní vliv na jednotlivé součásti měření (tlak, teplota, vlhkost).

3.2 Nejistoty měření

3.2.1 Nejistota měření, základní pojmy

Pojem nejistota (nejistota měření) je označením pro parametr související s výsledkem měření a charakterizující rozsah hodnot, které je možno racionálně přiřadit k měřené veličině. Nejistota se skládá z několika dílčích nejistot (složek).

Přínos nejistot:

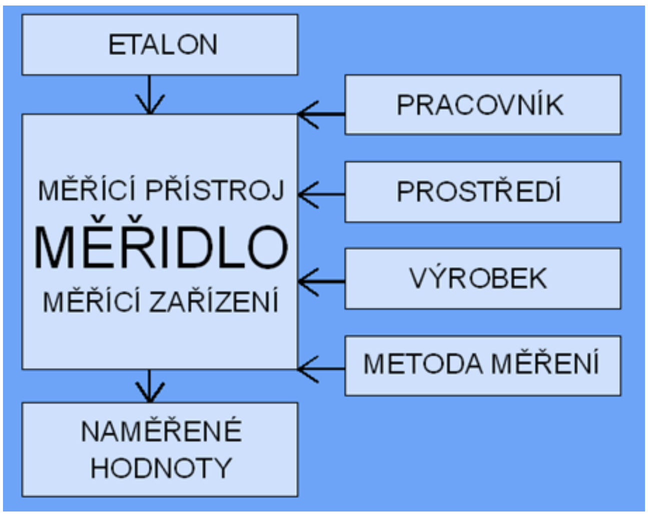
- Větší univerzálnost
- Větší výstižnost oproti chybám
- Jednotnost pojetí všech nejistot
- Neomezená platnost (oblast, stát, svět)

Vysvětlení:

- původní chyby = dnes zdroje nejistot
- nejistota = „ohodnocení chyby“

Vyjádření výsledku měření včetně nejistoty měření umožňuje srovnání s jinými laboratořemi či podniky. Je uznáván mezinárodně a umožňuje jednotnou interpretaci výsledků. Dále umožňuje srovnání výsledků zkoušek nových výrobků. Nejistota měření je parametr přidružený k výsledku měření – střední hodnotě. Charakterizuje rozptyl hodnot, které jsou přisuzovány naměřené veličině s určitou pravděpodobností. Každé měření je zatíženo chybami měření a tak hovoříme o nejistotě měření. Nejistotu měření způsobuje:

- Měřidlo
- Pracovník
- Prostředí
- Etalon
- Výrobek – součást
- Metoda měření



Obr. 3.2 Proces měření (převzato z Design Tech – Petr Zahrádka – Nejistoty měření)

ZÁKLADNÍ POJMY A DEFINICE Z OBLASTI NEJISTOT MĚŘENÍ:

Tab. 3.1 Základní pojmy a definice z oblasti nejistot měření (převzato z norem)

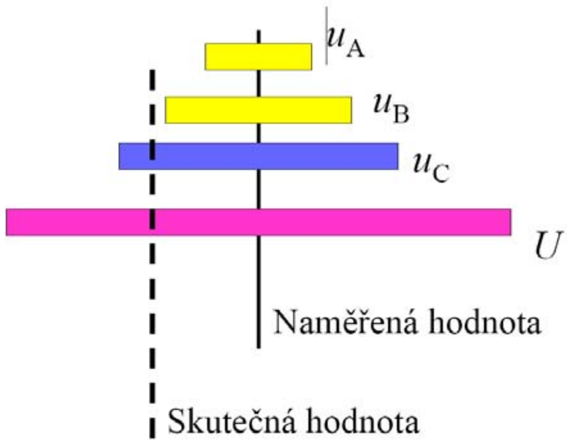
Aritmetický průměr – součet hodnot podělený počtem hodnot.
Koeficient citlivosti související se vstupním odhadem – změna hodnot výstupního odhadu jako důsledek změny hodnot vstupního odhadu podělená změnou hodnot tohoto vstupního odhadu.
Koeficient pokrytí – číselný faktor, kterým se násobí standardní nejistota měření s cílem zjistit rozšířenou nejistotu měření.
Konfidenční pravděpodobnost – podíl, obvykle velký, hodnot z rozdělení, které je možné přiřadit měřené veličině jako výsledek měření.
Korelace – vztah mezi 2 nebo větším počtem náhodných veličin v rámci rozdělení 2 nebo většího počtu náhodných veličin.
Koeficient korelace – míra relativní vzájemné závislosti 2 náhodných veličin rovnající se podílu jejich kovariance a kladné odmocniny součinu jejich rozptylů.
Kovariance – míra vzájemné závislosti 2 náhodných veličin rovnající se střední hodnotě součinu odchylek 2 náhodných veličin od jejich středních hodnot.
Metoda vyhodnocení typu A – metoda vyhodnocení nejistoty měření pomocí statistické analýzy série měření.
Metoda vyhodnocení typu B – metoda vyhodnocení nejistoty měření jiným způsobem, než je statistická analýza série měření.
Náhodná veličina – konkrétní veličina, která je předmětem měření.
Nejistota měření – parametr, který souvisí s výsledkem měření a charakterizuje rozsah hodnot, jež je možné racionálně přiřadit k měřené veličině. Často se používá také zkrácený název **nejistota.**
Nejlepší měřící schopnost – nejmenší nejistota měření, které může laboratoř dosáhnout v rámci předmětu své akreditace, když vykonává více méně rutinní kalibrace téměř ideálních etalonů s cílem definovat, realizovat, zachovat nebo reprodukovat jednotku dané veličiny nebo jednu nebo několik jejích hodnot.
Pravá (skutečná) hodnota veličiny – hodnota, která je ve shodě s definicí dané blíže určené veličiny (hodnota po přesném měření).
Průřezový odhad rozptylu – odhad výběrového rozptylu získaný z dlouhé série měření stejné měřené veličiny za stejných podmínek.
Vstupní odhad – hodnota odhadu vstupní veličiny používaná při vyhodnocení výsledku měření.
Vstupní veličiny – a, veličiny jejichž odhadovaná hodnota a příslušná nejistota se určují přímo měřením (1 měření nebo opakované). b, veličiny, jejichž odhad a příslušná nejistota vstupují do měření z vnějšího zdroje.
Výstupní odhad – výsledek měření vypočítaný ze vstupních odhadů pomocí funkce modelu měření.
Výstupní veličina – veličina, která při vyhodnocení měření představuje měřenou veličinu.
Relativní standardní nejistota měření – standardní nejistota veličiny podělená odhadem dané veličiny.
Rozdělení pravděpodobnosti – funkce vyjadřující pravděpodobnost, že náhodná veličina nabude určité hodnoty nebo hodnoty z určitého intervalu.
Rozptyl – střední hodnota druhé mocniny odchylky náhodné veličiny od její střední hodnoty.
Rozšířená nejistota – veličina definující interval okolo výsledku měření, který zahrnuje velkou část rozdělení hodnot, jež je možné přiřadit k měřené veličině.
Směrodatná odchylka – druhá odmocnina rozptylu.
Standardní nejistota měření – nejistota měření vyjádřená jako směrodatná odchylka.
Výběrová směrodatná odchylka – druhá odmocnina výběrového rozptylu.
Výběrový rozptyl – veličina charakterizující rozptýlení výsledků série n pozorování (měření, odečítání) stejné měřené veličiny získaná jako druhá mocniny vztahu.

3.2.2 Typy nejistot

Ke stanovení jejich velikosti jsou principiálně k dispozici tyto dvě metody:

- Nejistoty vyhodnocované metodami A (u_A) – statistické zpracování naměřených údajů
- Nejistoty vyhodnocované metodami B (u_B) – jiné než statistické zpracování naměřených údajů

- Nejistoty kombinované a rozšířené (u_C) – ze základních typů nejistot A a B se snadno, prostřednictvím součtu jejich čtverců, určí výsledná nejistota kombinovaná.



Obr. 3.3 Typy nejistot

Výstupní veličinu y, která je funkcí m vstupních veličin x_m, je možno popsat vztahem (vztah 3.9):

$$y = f(x_1, x_2, \ldots x_i, \ldots x_m) \tag{3.9}$$

Kde:
y ….. odhad vstupní veličiny,
x_i …. odhady veličin vstupních,
f ….. známý funkční vztah

Nejobecnějším pojetí potom lze pro nejistotu u_y odhadu y napsat vztah (vztah 3.10):

$$u_y = \sqrt{\sum_{i=1}^{m} A_i^{\ 2} * u_{xi}^{\ \ 2}} \tag{3.10}$$

Kde:
$u(y)$, $u(x_i)$ …. jednotlivé složky nejistot,
A_i …. koeficient citlivosti (převodu) příslušného zdroje nejistoty, který je znám, popř. se určí jako parciální derivace funkce y podle příslušné vstupní veličiny x_i (vztah 3.11):

$$A_i = \frac{\partial y}{\partial x_i} = \frac{\partial f(x_1, x_2, \ldots x_i, \ldots x_m)}{\partial x_i} \tag{3.11}$$

3.2.3 Vyhodnocení nejistot pomocí metody typu A

Jedná se o základní kvantitativní charakteristika nejistoty měření: Označuje se symbolem u z anglického uncertainty – označení u_A Odpovídá v podstatě náhodným chybám dle klasického přístupu. Jejich příčiny se považují za neznámé a hodnota nejistoty typu A klesá s počtem měření.

Proto se požaduje minimálně 5 - 10 měření. Je vyhodnocena pomocí statistických metod a je charakterizována standardní odchylkou aritmetického průměru. Značení – $u_A(y)$ = směrodatná odchylka aritmetického průměru, Nejistota se zde zpravidla značí $u_A(y)$ a s použitím vztahu (vztah 3.5) je možné napsat (vztah 3.12):

$$u_A(y) = s(\bar{y}) = \frac{s(y)}{\sqrt{n}} = \sqrt{\frac{1}{n(n-1)}\sum_{i=1}^{n}(y_i - \bar{y})^2} \tag{3.12}$$

Tato nejistota je způsobena kolísáním naměřených údajů. V případě malého počtu měření ($n < 10$) je hodnota určená pomocí vztahu (vztah 3.12) málo spolehlivá. Potom by bylo třeba tuto nejistotu (způsobenou kolísáním naměřených hodnot) odhadnout metodou typu B na základě jiných informací, než jsou současně naměřené hodnoty.

3.2.4 Vyhodnocení nejistot pomocí metody typu B

Označení u_B. Jsou získány jinak než statistickým zpracováním výsledků opakovaných měření a jsou vyhodnoceny pro jednotlivé zdroje nejistoty určené pro konkrétní měření a jejich hodnoty nezávisí na počtu opakování měření. Pocházejí od různých zdrojů a jejich společné působení vyjadřuje výsledná standardní nejistota typu B. Opět se nabízí analogie se systematickými složkami chyb. Rozhodně ale nejde o jednoznačnou souvislost, protože metodou B je možné odhadnout i vliv náhodných chyb, např. při kalibraci využitím minulých měření. Standardní nejistota se odhaduje pomocí racionálního úsudku na základě všech možných a dostupných informací. Nejčastěji se používají:

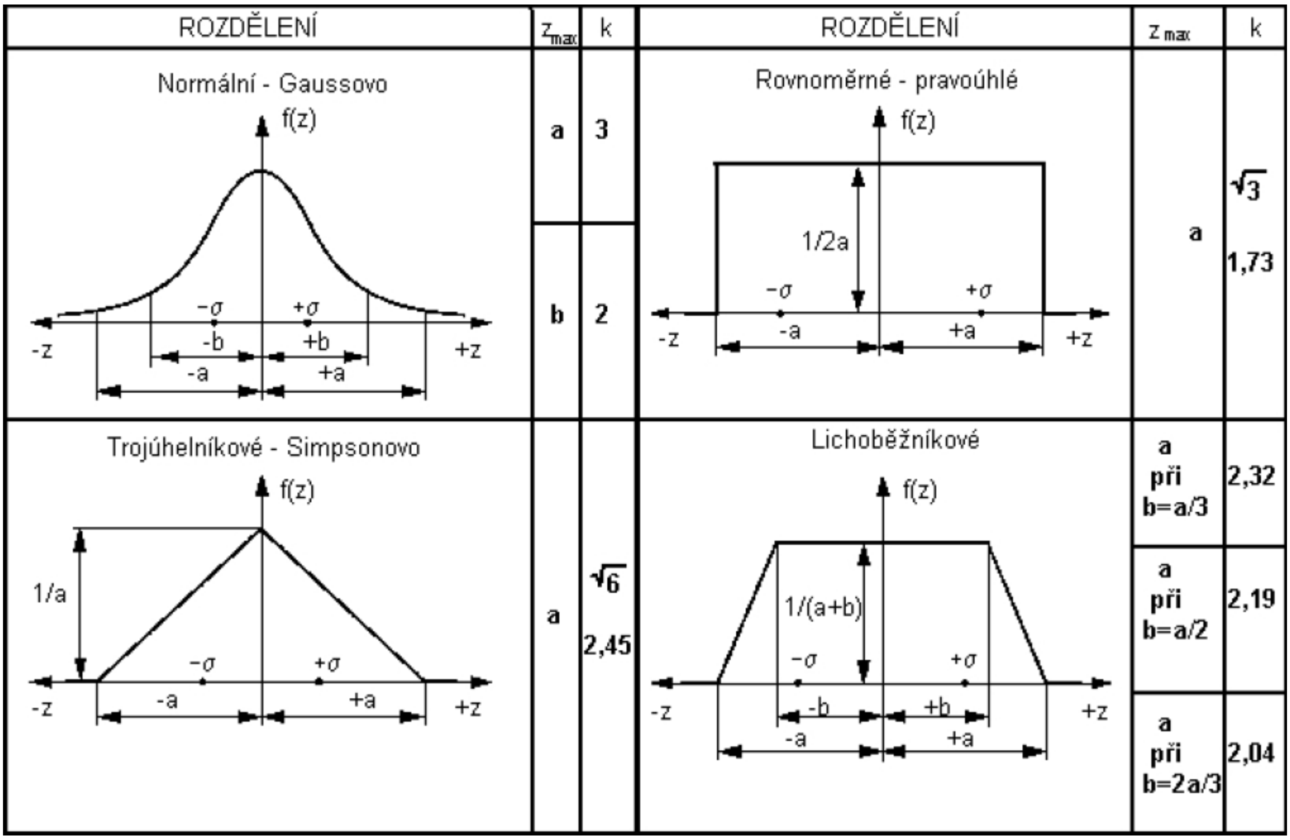
- údaje výrobce měřící techniky,
- zkušenosti z předchozích sérií měření,
- zkušenosti s vlastnostmi chování materiálů a techniky a poznatky o nich,
- údaje získané při kalibraci a z certifikátů,
- nejistoty referenčních údajů v příručkách.

Při určování nejistoty metodou typu B se vychází z dílčích nejistot jednotlivých zdrojů $u_B(z_j)$. Je-li známa maximální odchylka j-tého zdroje nejistoty z_{jmax} určí se nejistota $u_B(z_j)$ podle vztahu (vztah 3.13):

$$u_B(z_j) = \frac{z_{j\max}}{k} \tag{3.13}$$

Kde:

k …. součinitel vycházející ze zákona rozdělení, kterým se příslušný zdroj nejistot řídí. V některých případech však může být známa již přímo hodnota standardní nejistoty $u_B(z_j)$ (např. z kalibračního certifikátu měřidla).



Obr. 3.4 Hodnoty koeficientů pro různá rozdělení

Výsledná nejistota se určí metodou B pro p zdrojů z_1, z_2, …. Z_j, …. Z_p podle vztahu (vztah 3.14):

$$u_B(y) = \sqrt{\sum_{j=1}^{p} A_j^2 . u_B^2(z_j)} \qquad (3.14)$$

Kde:
u_B (z_j) …. Jsou nejistoty jednotlivých zdrojů
A_j …. Součinitel citlivosti

Takto se nejistota vyhodnocovaná metodou B převede do zcela nové podoby a oproti předchozím představám získávají i tyto nejistoty charakter směrodatné odchylky. Jako s takovými, popř. ve druhých mocninách jako s rozptylem, se s nimi i nadále pracuje.

3.2.5 Vyhodnocení nejistot pomocí metody typu B – pro délková měření

- u_M – nejistota měřidla – je určena buď výrobcem nebo kalibrací měřidla
- u_E – nejistota etalonu – je dána hodnotou z kalibračního protokolu
- u_T – nejistota daná rozdílem teplot od 20°C – v případě malých rozsahů stupnice (do 150 mm) a pohybuje-li se teplota v rozmezí (20 +- 2) °C lze tento vliv nejistoty zanedbat

Nejistotu typu B vypočteme jako geometrický součet dílčích nejistot (vztah 3.15):

$$u_B = \sqrt{u_M^{\,2} + u_E^{\,2} + u_T^{\,2}} \qquad (3.15)$$

Pro většinu měření vystačíme s maximální dovolenou chybou měřidla (označení z), kterou uvádí výrobce měřidla.

Tab. 3.2 Hodnoty přesností od výrobců

Měřidlo	**Dílek (mm)**	**Počet dílků pomocné stupnice**	**Přesnost čtení (mm)**	**Maximální dovolená chyba podle výrobce - z**	**Nejistota u_M**
Posuvné měřítko	1	20	0,05	$\pm(0{,}05 + 0{,}2L) = \pm 0{,}07mm$	$0{,}07/\sqrt{3}$
Mikrometr	0, 5	50	0,005	$\pm 0{,}006mm$	$0{,}006/\sqrt{3}$

Výpočet standardní nejistoty typu B se pak zjednoduší na tento vztah (vztah 3.16):

$$u_B = \frac{z}{\sqrt{3}} \qquad (3.16)$$

Hodnota odmocniny ze tří se používá pro normální, tedy Gaussovo rozdělení naměřených hodnot.

3.2.6 Nejistoty kombinované

Označení u_C a vypočteme ji jako geometrický součet nejistoty typu A a typu B (vztah 3.17):

$$u_c(y) = \sqrt{u_A^{\,2}(y) + u_B^{\,2}(y)} \qquad (3.17)$$

3.2.7 Nejistoty rozšířené

Označení U. Získá se násobením kombinované standardní nejistoty u_C koeficient rozšíření k (vztah 3.18):

$$U(y) = k_r * u_c(y) \qquad (3.18)$$

Kde:
$U(y)$ …. Rozšířená nejistota
k_r …. Koeficient rozšíření
$u_C(y)$ …. Standardní nejistota kombinovaná

3.2.8 Zdroje nejistot

Jako zdroje nejistot lze označit veškeré jevy, které nějakým způsobem mohou ovlivnit či působit neurčitost jednoznačného stanovení výsledku měření, a tím vzdalují naměřenou hodnotu od hodnoty skutečné. Značnou roli zde sehrává také skutečnost, zda jde o měřicí metody přímé nebo nepřímé. Na nejistoty působí výběr měřicích přístrojů analogových nebo číslicových, použití různých filtrů, vzorkovačů a dalších prostředků v celé trase přenosu a úpravy měřicího signálu. K nejistotám velmi výrazně přispívají rušivé vlivy prostředí v tom nejširším slova smyslu.

Zde je uvedeny alespoň některé možné zdroje nejistot:

- nedokonalá či neúplná definice měřené veličiny nebo její realizace,
- nevhodný výběr přístroje (rozlišovací schopnost aj.)
- nevhodný (nereprezentativní) výběr vzorků měření,
- nevhodný postup při měření
- zjednodušení (zaokrouhlení) konstant a převzatých hodnot,
- linearizace, aproximace, interpolace anebo extrapolace při vyhodnocení,
- neznámé nebo nekompenzované vlivy prostředí,
- nedodržení shodných podmínek při opakovaných měřeních,
- subjektivní vlivy obsluhy,
- nepřesnost etalonů a referenčních materiálů

Některé ze zdrojů se projevují výhradně, či výrazněji v nejistotách vyhodnocovaných nejistotou typu A, jiné při použití nejistoty typu B. Mnohé zdroje ale mohou být příčinou obou skupin nejistot, a zde právě číhá největší nebezpečí v podobě opomenutí jedné ze složek, což může mít i velmi výrazný zkreslující účinek.

3.3 Nejistoty přímých a nepřímých měření

Samotná analýza nejistot je podstatně složitější než základ její teorie, který zde byl naznačen. Vše se komplikuje především v případech, kdy se na výsledku výstupní veličiny podílí několik veličin vstupních a ještě složitější se situace stává u měření nepřímých. U takových případů je ještě třeba posoudit, zda mohou existovat nějaké vzájemné korelace mezi vstupními veličinami a tyto se pak musí projevit také ve výsledné nejistotě. Pokud můžeme výstupní veličinu y, která je funkcí m vstupních veličin x_1 až x_m, je možno popsat vztahem (vztah 3.19):

$$y = f(x_1, x_2, \ldots x_i, \ldots x_m) \tag{3.19}$$

nejistota takovéto funkce je obecně popsána jako (vztah 3.20):

$$u^2(y) = \sum_{i=1}^{m} Ai^2 u^2(x_i) \tag{3.20}$$

kde A_i jsou součinitele citlivosti (vztah 3.21):

$$A_i = \frac{\partial y}{\partial x_i} = \frac{\partial f(x_1, x_2, \ldots, x_m)}{\partial x_i} \tag{3.21}$$

Toto vše platí pouze pro základní přímá měření, kdy nejsou žádné jiné vazby mezi jednotlivými vstupními parametry. Jestliže mezi dvěma či více vstupními veličinami existují další vazby, dá se předpokládat jejich vzájemné ovlivňování, které nazývá korelace. U takto korelovaných veličin je také předpoklad, že jejich nejistoty budou spolu nějakým způsobem svázány a tyto vazby se musí zákonitě projevit ve výsledné nejistotě. Jedná-li se o korelované veličiny, pak vztah (3.20) nabývá charakteristické podoby (vztah 3.22):

$$u^2(y) = \sum_{i=1}^{m} A_i^2 u^2(x_i) + 2\sum_{i=2}^{m}\sum_{j\Delta i}^{m-1} A_i A_j u(x_{i,j}) \tag{3.22}$$

Kde:
$u(x_{i,j})$ …. Kovariance nejistoty mezi korelovanými veličinami x_i a x_j

$$u(x_{i,j}) = r(x_{i,j}) u(x_i) u(x_j) \tag{3.23}$$

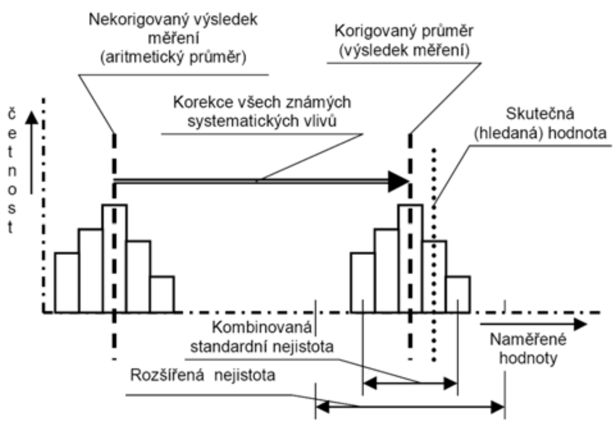
Kde:
$r(x_{i,j})$ …. Součinitel korelace mezi veličinami x_i a x_j a $u(x_i)$, resp. $u(x_j)$ jsou jejich nejistoty.

Korelaci, vzájemné vazby mezi veličinami, představuje například opakované měření více veličin téhož druhu pomocí jediného měřidla, použití víceúčelových měřidel, jako jsou multimetry, ale také třeba navázání jisté série měřidel na jediný společný etalon a podobné vlivy vyskytující se velmi často u měření nepřímých. Síla této vazby je oceněna pomocí korelačního součinitele v intervalu mezi nulou a jedničkou. Nula přitom vyjadřuje nezávislost či zanedbatelnou vazbu, zatímco jednička vazbu velmi silnou.

3.4 Korekce chyb a nejistot

Pokud se nám podaří pochopit negativní vlivy na měření, můžeme s výhodou korigovat podstatnou část systematických vlivů. To platí nejen o běžných systematických chybách měření, ale také o nejistotách, a to hlavně pro nejistoty, které vyhodnocujeme za pomocí metod typu B. Odstranění, či alespoň zmírnění jejich negativních vlivů na výsledek měření se projeví značným zpřesněním. Názorný příklad je na obrázku (obr. 3.5).

Je známo, že korekce je chyba s opačným znaménkem, takže pro získání nejlepšího výsledku měření je třeba od naměřené hodnoty odečíst chybu, nebo naopak k ní přičíst korekci.



Obr. 3.5 Zpřesnění výsledků měření pomocí korekce systematických vlivů

3.5 Zápis výsledků měření s nejistotami

Níže uvedené zápisy výsledku měření v podobě aritmetického průměru s nejistotou jako tolerančního pásma se používá v mnoha předpisech a je nejběžnějším způsobem zápisu výsledné nejistoty.

Pomocí standardní nejistoty kombinované

- d = 1 503, 2 mm s u_c = 2, 9 mm
- d = 1 503, 2 (2, 9) mm
- d = 1 503, 2 mm ± 2, 9 mm
- d = (1 503, 2 ± 2, 9) mm

Pomocí standardní nejistoty rozšířené

- d = (1 503, 2 ± 5, 8) mm s k_r = 2
- d = (1 503, 2 ± ± 5, 8) mm

Pomocí bilanční tabulky

Kromě běžného (standardního) zápisu výsledku měření v podobě aritmetického průměru s nejistotou jako tolerančním pásmem, doporučen také zápis postupu určené výsledné nejistoty měření do tzv. bilanční tabulky.

$$u_q(y) = A_q u_q(x); u(y) = \sqrt{\sum_{q=1}^{m} u_q^{\,2}(y)} \qquad (3.24)$$

Tab. 3.3 Obecná podoba bilanční tabulky

Veličina X_q; Y	Veličina x_q; y	Standardní nejistota u_q (x)	Typ rozdělení	Koeficient citlivosti A_q	Příspěvek ke standardní nejistotě u_q (y); nejistota u(y)
X_1	x_1	$u_1(x)$	Podle situace	A_1	$u_1(y)$
X_2	x_2	$u_2(x)$		A_2	$u_2(y)$
…	…	…		…	…
X_q	x_q	u_q (x)		A_q	u_q (y)
…	…	…		…	…
X_m	x_m	u_m (x)		A_m	u_m (y)
Y	y	-	-	-	u(y)

4 TYPICKÁ NEPŘÍMÁ MĚŘENÍ A ANALÝZA NEJISTOT

Převzato z článku: Nejistoty v měření III: nejistoty nepřímých měření

4.1 Typická nepřímá měření

Nepřímým měřením nazýváme takové měřicí úlohy, při nichž se výsledek stanoví výpočtem. Do vztahu, podle něhož se hledaná veličina vypočítá, dosazujeme veličiny, jejichž hodnoty jsme získali měřením a které tedy známe s určitou (nám známou) chybou.

4.1.1 Opakované měření jedním měřidlem

Při opakovaném přímém měření stejným měřidlem za stejných podmínek bude odhadem hodnoty dané měřené veličiny aritmetický průměr naměřených hodnot a nejistotou stanovenou metodou A bude výběrová směrodatná odchylka aritmetického průměru. Veškeré vlivy (chyba měřidla, chyby měření) se započítávají do nejistoty zjištěné metodou B. Kovariance mezi měřeními vzniká společnou chybou používaného měřidla při jednotlivých měřeních a rovná se čtverci nejistoty měřidla (korelační koeficient = 1). Kovariance určená metodou A lze v daném případě většinou zanedbat.

4.1.2 Opakované měření různými měřidly

V situaci, že pro každé měření je používáno jiné měřidlo, tím že pocházejí od různých výrobců nebo vyrobenou jinou výrobní technologií apod., lze očekávaně předpokládat, že mezi chybami měřidel nejsou žádné souvislosti. Kovariance mezi měřeními zapříčiněné chybou použitých měřidel se nebudou vyskytovat. Kovariance mohou být způsobeny jen (shodnými) podmínkami měření, pokud tyto výsledky měření výrazněji ovlivňují.

Pokud nelze zaručit nezávislost mezi chybami použitých měřidel, např. použitá měřidla jsou od stejného výrobce a uživatel nemá zajištěno, že jsou vyrobena tak, aby jejich chyby byly nezávislé, je nutné tuto závislost uvažovat při dalším výpočtu nejistot právě s využitím kovariancí. Nelze-li určit, jaká část chyby používaných měřidel je závislá, je korelační koeficient mezi měřidly = 1. Pocházejí-li použitá měřidla od stejného výrobce a mají i stejnou třídu přesnosti, postupuje se tak, jako by se měřilo jediným měřidlem.

4.1.3 Měření kalibrovanou sadou měřidel

Při měření pomocí sady měřidel (sada měrek, závaží apod.), z nichž jakékoliv je schopno reprodukovat jednu hodnotu měřené veličiny, jsou známy odhady jejich hodnot x_i (i=1, 2, …, p) i nejistoty $u(x_i)$. Jednotlivé odhady mohou být mezi sebou nezávislé nebo také navzájem závislé podle způsobu kalibrace měřidel. Je z kalibrace třeba znát nejistoty $u(x_1)=c_1$, $u(x_2)=c_2$, …., $u(x_p)=c_p$ (c_1, c_2, …, c_p jsou známá čísla) a kovariance $u(x_i,x_j)= c_{i,j}$ ($c_{i,j}$ jsou rovněž známá čísla pro i=1, 2, …, p-1, j>i), kdy ale často $c_{i,j} = 0$.

V případě potřeby lze podrobnější metodiku postupu i vzorové příklady nalézt např. v této literatuře:

[1]
[4]
[7]

4.1.4 Měření pomocí měřicího přístroje s konstantní nejistotou

Při měření měřicím přístrojem s nejistotou konstantní v plném rozsahu přístroje platí, že jsou-li známy naměřené hodnoty (odhady hodnot měřených veličin) x a nejistoty $u(x)$=c pro všechny hodnoty x z daného rozsahu přístroje (c … známé číslo), musí být známy také kovariance $u(x_i, x_j) \in [0, c^2]$ pro všechny dvojice x_i, x_j z rozsahu přístroje. V reálném životě se používají především krajní hodnoty intervalu kovariancí, tj. 0 a c^2, kde c^2 se získá např. aplikací vztahu 4.9 a 4.10. Přitom se uvažuje nulová kovariance mezi 2 hodnotami x_i a x_j, když se tato odečítá od výsledné nejistoty, a kovariance rovná c^2, když je tato připočítávána k výsledné nejistotě. Tím se postihnou nejméně příznivé případy.

PŘÍKLAD: Ověřený deformační tlakoměr třídy přesnosti 1 s měřícím rozsahem 0, 1 MPa a standardní nejistotou $u(P)$=0,58 kPa má kovarianci mezi 2 naměřenými hodnotami způsobenou měřicím přístrojem. Hodnota dané kovariance je v rozmezí od 0 kPa^2 do 0, 34 kPa^2. Pomocí tohoto přístroje se nepřímo určuje např. rozdíl tlaků, model měření (vztah 4.3):

$$\Delta p = p_1 - p_2 \tag{4.3}$$

A pro nejistotu $u(\Delta p)$ odhadu rozdílu tlaků Δp platí (vztah 4.4):

$$u^2(\Delta p) = u^2(p_1) + u^2(p_2) - 2u(p_1, p_2) \tag{4.4}$$

Jelikož se kovariance vlivem chyby měřicího přístroje (metoda B) mohou pohybovat od 0 kPa^2 do 0, 34 kPa^2, je třeba v tomto případě volit nulovou hodnotu, aby nejistota nebyla v žádném případě neoprávněně zmenšena. Ve všech vztazích uvedených v této kapitole se přitom očekává, že

výsledná nejistota ovlivní pouze kovariance vyhodnocované metodou B, protože měření není opakováno tolikrát, aby bylo možné uvažovat i kovariance určené metodou A, tj. statistické vyhodnocení. Pokud by byl výsledek stanoven na základě opakovaných měření a bylo by zřejmé, že do výsledné nejistoty se promítnou i kovariance $u_A(p)$, pak by se tyto do výsledku zahrnuly obvyklým způsobem jako další člen „součtu“. Daný postup je možné použít také při vyhodnocení poměru 2 tlaků měřených uvažovaným tlakoměrem. Model měření je (vztah 4.5):

$$k = \frac{p_1}{p_2} \tag{4.5}$$

A nejistota podílu *k*

$$u^2(k) = \frac{1}{p_2^{\;2}} u^2(p_1) + \frac{p_1^{\;2}}{p_2^{\;4}} u^2(p_2) - 2\frac{1}{p_2}\frac{p_1}{p_2^{\;2}} u(p_1, p_2) \tag{4.6}$$

Kovariance způsobena chybou měřicího přístroje (metoda B) je opět pokládána za nulovou. Naproti tomu při vyhodnocení součtu anebo součinu 2 tlaků naměřených uvažovaným tlakoměrem je třeba použít maximální možnou hodnotu kovariance. Model měření (vztah 4.7):

$$p = p_1 + p_2 \tag{4.7}$$

a nejistota výsledku bude (vztah 4.8):

$$u^2(p) = u^2(p_1) + u^2(p_2) + 2u(p_1, p_2) \tag{4.8}$$

↓

Bere se v úvahu největší možná hodnota, aby v žádném případě nedošlo k neoprávněnému menšení nejistoty.

Obdobně se postupuje při součinu 2 tlaků. Pro Model měření (vztah 4.9):

$$p = p_1 \bullet p_2 \tag{4.9}$$

a nejistota výsledku bude (vztah 4.10):

$$u^2(p) = p_2^{\;2} u^2(p_1) + p_1^{\;2} u^2(p_2) + 2p_1 p_2 u(p_1, p_2) \tag{4.10}$$

Jiný stav by nastal, kdyby jednotlivé tlaky byly měřeny různými tlakoměry, u nichž je jisté, že jsou navzájem nezávislými měřidly (např. přístroje od různých výrobců, různé principy a technologie atd.). Potom chyby měřicích přístrojů jsou navzájem nezávislé a jimi způsobena kovariance vyhodnocovaná metodou B je nulová. Jestli není jisté, že oba tlakoměry a jejich chyby jsou nezávislé, musí se zde uvažovat s možnou kovariancí (např. oba využívají stejný princip a nebo mají stejného výrobce, lze předpokládat, že chyby všech tlakoměrů dané třídy jsou závislé v důsledku totožné technologie výroby, stejných výrobních strojů apod.).

4.1.5 Příklady nepřímých měření

- měření hustoty tělesa na základě měření hmotnosti a objemu
- měření elektrického odporu na základě měření proudu a napětí
- měření rychlosti na základě měření dráhy a času
- měření tlaku nepřímým měřením
- nepřímé měření proudu pomocí měření úbytku napětí
- nepřímé měření délek
- objem na základě měření průměru, výšky (např. váleček) tímtéž posuvným měřítkem

4.2 Postupy určování standardních nejistot při nepřímých měřeních

Veličina *Y*, která je předmětem zájmu (výstupní veličina), známou funkci *f* veličin X_1, X_2, …, X_m. Veličiny X_1, X_2, …, X_m (vstupní veličina) jsou takové, které lze přímo změřit nebo jejichž odhady, nejistoty a kovariance známe z jiných zdrojů. Tedy (vztah 4.11):

$$y = f(X_1, X_2, ..., X_m) \tag{4.11}$$

Odhad y výstupní veličiny *Y* se určí ze vztahu (vztah 4.12):

$$y = f(x_1, x_2, ..., x_m) \tag{4.12}$$

Kde:
x_1, x_2, x_m …. Odhady vstupních veličin X_1, X_2, …., X_m.

Nejistota odhadu y veličiny *Y* pro případ, že odhady x_1, x_2, x_m jsou nekolerované se určí podle vztahu (vztah 4.13):

$$u^2(y) = \sum_{i=1}^{m} A_i^2 u^2(x) \tag{4.13}$$

přičemž pro koeficienty citlivosti (převodové koeficienty) A_i platí (vztah 4.14):

$$A_i = \frac{\partial f(x_1, x_2, ..., x_m)}{\partial x_i} \Big| \quad X_1 = x_1 .... X_m = x_m \tag{4.14}$$

V případě, že odhady x_1, x_2 ,..., x_m jsou *korelované*, je třeba uvažovat také kovariance mezi jednotlivými odhady, které tvoří další složky výsledné nejistoty. Pro korelované vstupní veličiny se potom nejistota výstupní veličiny určí ze vztahu (vztah 4.15):

$$u^2(y) = \sum_{i=1}^{m} A_i^2 * u^2(x_i) + 2\sum_{i=2}^{m} \sum_{j \angle i}^{m=1} A_i * A_j * u(x_i, x_j) \tag{4.15}$$

Kde:
$U(x_i, x_j)$ …. Kovariance mezi navzájem korelovanými odhady x_i a x_j, což mohou být jak dvě vzájemně závislé různé veličiny, tak i dvě hodnoty téže veličiny, mezi nimiž existuje jistá korelační vazba.

Někdy je výhodné určit nejistoty odhadu y výstupní veličiny Y zvlášť metodou A a zvlášť metodou B. Potom se celková (kombinovaná) standardní nejistota určí podle vztahu (vztah 4.16):

$$u_c = \sqrt{u_A{}^2(y) + u_B{}^2(y)} \tag{4.16}$$

4.3 Kovariance při určování výsledných nejistot

4.3.1 Kovariance a nejistoty

Nyní budou vysvětleny vzájemné vazby mezi jednotlivými zdroji, které mají za následek existenci kovariancí při působení jednotlivých zdrojů nejistot.

Kovariance mezi odhady vlivů jednotlivých zdrojů určují, jak jsou tyto odhady vzájemně ovlivněny společnými zdroji nejistot. Navzájem závislé zdroje nejistot přispívají k výsledné nejistotě více nebo méně podle toho, jak se příslušné nejistoty slučují. V úvahu se tyto společné zdroje berou proto, aby bylo možné jejich vliv zohlednit ve výsledné nejistotě. Kovariance mohou výslednou nejistotu zvětšit i zmenšit. Závisí to především na jejich charakteru (zda zdroje působí souhlasně či protichůdně na dva uvažované odhady) a také na tvaru funkce, kterou jsou vázány na výstupní veličinu.

Kovariance mezi jednotlivými vstupními veličinami X_i a X_j se určí podobně jako nejistoty buď metodou typu A, založenou na statistickém zpracování naměřených údajů, nebo od ní odlišnou metodou typu B.

4.3.2 Stanovení kovariance mezi odhady x_i a x_j metodou typu A

Metoda typu A se ke stanovení kovariancí mezi dvěma odhady x_i a x_j dvou vstupních veličin (zdrojů nejistot) X_i a X_j používá tehdy, je-li k dispozici n naměřených hodnot obou veličin $x_{i1}, x_{i2}, \ldots, x_{in}$ a $x_{j1}, x_{j2}, \ldots x_{jn}$. Jsou-li odhady x_i a x_j představovány aritmetickými průměry (vztah 4.17):

$$\bar{x}_i = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_{ik}, \bar{x}_k = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_{jk} \tag{4.17}$$

vypočítá se kovariance určená metodou typu A podle vztahu (vztah 4.18):

$$u_A(x_i, x_j) = \frac{1}{n(n-1)}\sum_{k=1}^{n}(x_{ik} - \bar{x}_i)(x_{jk} - \bar{x}_j) \tag{4.18}$$

4.3.3 Stanovení kovariance mezi odhady x_i a x_j metodou typu B

Kovariance $u_B(x_i, x_j)$ je kovariance vyhodnocená metodou B, odlišnou od metod vycházejících ze statistické analýzy naměřených údajů. Kovarianci lze určit:

- čtením z certifikátů přístrojů, literatury atd.
- výpočtem.

Výpočet se skládá z těchto pěti rámcových kroků:

- Vytipují se zdroje závislosti (zdroje korelací).

- Pro každý zdroj každé dvojice odhadů se na základě zkušeností odhadne korelační koeficient $r(x_i, x_j)$, vyjadřující míru závislosti mezi odhady. Ten může obecně nabývat hodnoty o d -1 do +1. Hodnoty blízké nule odpovídají slabé závislosti, hodnoty blízké ± 1 odpovídají závislosti silné. Příslušná hodnota kovariance se určí ze vztahu (vztah 4.19):

$$u_B(x_i, x_j) = r(x_i, x_j) * u_B(x_i) * u_B(x_j) \tag{4.19}$$

- V případě, že dvě vstupní veličiny X_1, X_2 s odhady x_1, x_2 jsou funkcemi nezávislých veličin $Z_1, Z_2, ..., Z_m$, které lze vyjádřit vztahy (vztah 4.20):

$$\begin{aligned} X_1 &= g_1 (Z_1, Z_2, ..., Z_m) \\ X_2 &= g_2 (Z_1, Z_2, ..., Z_m) \end{aligned} \tag{4.20}$$

určí se kovariance mezi odhady x_1, x_2 ze vztahu (vztah 4.21):

$$u_B(x_1, x_2) = \sum_{i=1}^{m} A_{1i} A_{2i} u_B{}^2(z_i) \tag{4.21}$$

Kde:
A_{1i}, i A_{2i} jsou koeficienty citlivosti pro funkce g_1 , g_2 podle vztahu (4.14). Vztah (4.21) umožňuje určit kovarianci mezi odhady na základě znalosti funkčních závislostí vstupních veličin X_1 a X_2 na nezávislých veličinách $Z_1, Z_2, ..., Z_m$. To znamená, že vhodným sestavením modelu měření je někdy možné jinak nevyhnutelné odhadování hodnoty korelačního koeficientu. Jestliže se veličiny X_1, X_2, které vystupují v modelu (vztah 4.11). Vztah (4.20), vzájemně závislé veličiny X_1 a X_2 už dále nebudou v modelu (vztah 4.11) vystupovat.

- V případě, že dvě vstupní veličiny X_1, X_2 s odhady x_1, x_2 jsou funkcemi závislých veličin $Z_1, Z_2, ..., Z_m$, což lze vyjádřit vztahy (vztah 4.20), určí se kovariance mezi odhady x_1, x_2 ze vztahu (vztah 4.22)

$$u_B(x_1, x_2) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m} A_{1i} A_{2j} u_B(z_i, z_j) = \sum_{i=1}^{m} A_{1i} A_{2i} u_B{}^2(z_i) + \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1, j\neq i}^{m} A_{1i} A_{2j} u_B(z_i, z_j) \tag{4.22}$$

Kde: $u_B(z_i, z_j)$ je známá kovariance mezi odhady z_i a z_j.

- Jestliže nelze určit korelační koeficient ani se vyhnout korelacím sestavením vhodného modelu, doporučuje se určit maximální vliv korelace na výslednou nejistotu prostřednictvím horní hranice odhadu standardní nejistoty měřené veličiny. Předpokládejme, že v modelu (vztah 4.11) jsou veličiny X_1 a X_2 korelované a že stupeň korelace neznáme. Ostatní veličiny v modelu nejsou korelované, takže potom platí (vztah 4.23):

$$
\begin{aligned}
&u_B^{\,2}(y) \le \left[\left|A_1 u_B(x_1)\right|\right] + \left|A_2 u_B(x_2)\right|^2 + \sum_{i=3}^{m} A_i^{\,2} u_B^{\,2}(x_i) = \\
&= A_i^{\,2} u_B^{\,2}(x_1) + A_2^{\,2} u_B^{\,2}(x_2) + 2\left|A_1 A_2\right| u_B(x_1) u_B(x_2) + \sum_{i=3}^{m} A_i^{\,2} u_B^{\,2}(x_i) = \qquad (4.23) \\
&= \sum_{i=1}^{m} A_i^{\,2} u_B^{\,2}(x_i) + 2\left|A_1 A_2\right| u_B(x_1) u_B(x_2)
\end{aligned}
$$

To znamená, že není-li k dispozici dostatek informací pro přesné ohodnocení kovariancí, a tím i výsledek nejistoty, je možné uvádět horní hranici nejistoty.

5 MODEL VYBRANÉHO PŘÍKLADU

Úkolem příkladu je a bude praktická ukázka měření délky a to metodou nepřímého měření, tento model bude vytvořen v prostředí aplikace Microsoft Office Excel.

Zadání úlohy je v tom, že je známá jmenovitá hodnota (délka) měřeného prvku (tělesa, součásti apod.) a změří se skutečná délka prvku (tělesa, součásti apod.) za využití přesného čárkového měřítka o délce 1 m a s dělením po 1 mm, a pro úplné měření je nutné provést měření daného prvku (tělesa, součásti apod.) nadvakrát, protože jmenovitá délka je větší jak velikost měřidla a to uvedený 1 m. Kromě těchto informací jsou dány i jiné informace jako jsou dovolená chyba měřidla, základní chyba měřidla, koeficient pro výpočet složky chyby závislé na měřené délce, který je poskytnut výrobcem měřidla, vliv např. působnost teploty se zanedbává. Dále se provede rozdělení měřeného prvku, v tomto případě na dvě sekce o určitých jmenovitých hodnotách. Matematickým modelem daného měření bude součet daných sekcí, které můžeme rozdělit např. na k_1 a k_2 a celkový součet těchto sekcí bude $d = d_1 + d_2$. Kromě toho se spočítají aritmetické průměry, směrodatná odchylka a to jak pro samotné sekce, tak pro celý součet daných sekcí. Další postup je v tom, že stanovíme standardní nejistoty získané metodou A i B včetně kovariancí samostatně a potom je sloučíme.

5.1 Zadání úkolu

Úkolem je změřit délku *d* stolu o jmenovité hodnotě 1 500 mm za pomoci přesného čárkového měřítka o délce 1 m s dělením po 1 mm (tzv. přesný svinovací metr). Měření se opakuje 10x a to za stejných podmínek, další vlivy na samotné měření se zanedbávají (teploty apod.). Dále se provede rozdělení měřeného prvku, v tomto případě na dvě sekce o určitých jmenovitých hodnotách a to 900 mm a 600 mm modelem daného měření bude součet daných sekcí, které můžeme rozdělit např. na d_1 a d_2 a celkový součet těchto sekcí bude $d = d_1 + d_2$. Měřidlo má podle certifikátu dovolenou chybu $\delta_{DOV} = \delta_1 + \delta_2 l$ při teplotě. Materiál měřidla a materiál měřeného stolu mají stejný teplotní součinitel délkové roztažnosti, i teplota je stejná.

$d_{\text{jmenovitá hodnota}} = 1\ 500$ mm
$d_{1\ \text{jmenovitá hodnota}} = 900$ mm
$d_{2\ \text{jmenovitá hodnota}} = 600$ mm

<u>Naměřené a vypočtené hodnoty (10x měření) při nepřímém měření délky stolu:</u>

Číslo měření	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
d_1 (mm)	902	903	901	902	903	902	904	902	903	904
d_2 (mm)	601	600	602	602	599	600	601	602	600	599
$d = d_1 + d_2$ (mm)	1503	1503	1503	1504	1502	1502	1505	1504	1503	1503

ARITMETICKÝ PRŮMĚR:

d_1 (mm) - aritmetický průměr	902,6000
d_2 (mm) - aritmetický průměr	600,6000
d (mm) - aritmetický průměr	1503,2000

SMĚRODATNÁ ODCHYLKA ZÁKLADNÍHO SOUBORU – (vycházející ze vztahu 3.4):

$$\sigma = \pm\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(\overline{x}-x_i)^2}{n}}$$

d_1 (mm) – směrodatná odchylka základního souboru	0,91652
d_2 (mm) – směrodatná odchylka základního souboru	1,11355
d (mm) – směrodatná odchylka základního souboru	0,87178

VÝBĚROVÁ SMĚRODATNÁ ODCHYLKA (z výběrového souboru) – (vycházející ze vztahu 3.5):

$$s = \pm\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(\overline{x}-x_i)^2}{n-1}}$$

d1 (mm) – směrodatná odchylka výběrového souboru	0,305505
d_2 (mm) – směrodatná odchylka výběrového souboru	0,3711843
d (mm) – směrodatná odchylka výběrového souboru	0,2905933

u_A (d_1) = směrodatná odchylka (d_1) / 3, číslo 3 se získává $\sqrt{(n-1)}$, kde n … je počet měření

u_A (d_2) = směrodatná odchylka (d_2) / 3, číslo 3 se získává $\sqrt{(n-1)}$, kde n … je počet měření

u_A (d) = směrodatná odchylka (d) / 3, číslo 3 se získává $\sqrt{(n-1)}$, kde n … je počet měření

u_A (d_i) = s_d pro d_1 = 0, 305505
u_A (d_i) = s_d pro d_2 = 0, 3711843
u_A (d_i) = s_d pro d = 0, 2905933

5.2 Standardní nejistota metodou A

$$u_A(d) = \sqrt{u^2{}_A(d_1) + u^2{}_A(d_2) + 2u_A(d_1, d_2)}$$

u_A (d_1) = 0, 305505
u_A (d_2) = 0, 3711843

Výpočet pomocného vztahu a to kovariance určená metodou typu A:

Obecný vztah (vycházející ze vztahu 3.12, 4.18)::

$$u_A(x_i, x_j) = \frac{1}{n(n-1)} * \sum_{k=1}^{n} (x_{iK} - \overline{x}_i) * (x_{jK} - \overline{x}_j)$$

Upravený vztah pro použitý výpočet:

$$u_A(d_1, d_2) = \frac{1}{n(n-1)} * \sum_{k=1}^{n} (d_{1K} - \overline{d}_1) * (d_{2K} - \overline{d}_2)$$

$$u_A(d_1, d_2) = \frac{1}{10(10-1)} * (-0{,}24 - 0{,}24 - 2{,}24 - 0{,}84$$
$$-0{,}64 + 0{,}36 + 0{,}56 - 0{,}84 - 0{,}24 - 2{,}24)$$

$$\underline{u_A(d_1, d_2) = -0{,}073333 mm^2}$$

Standardní nejistota metodou A:

$$u_A(d) = \sqrt{u^2{}_A(d_1) + u^2{}_A(d_2) + 2u_A(d_1, d_2)}$$

$$u_A(d) = \sqrt{0{,}305505^2 + 0{,}3711843^2 + 2 * (-0{,}073333)}$$

$$\underline{u_A(d) = 0{,}29059 mm}$$

5.3 Standardní nejistota metodou B

- Dovolená chyba měřidla: $\delta_{DOV} = \delta_1 + \delta_2 l$ (podle certifikátu)
- Základní chyba měřidla, představovaná nejmenším dílkem stupnice, je δ_1 = 1 mm (rozlišovací schopnost)
- Výrobce definuje pro výpočet složky chyby závislé na měřené délce koeficient δ_2 = 2 mm/m
- Jiné vlivy, jako je působení teploty apod., se zanedbávají.

Obecný vztah:

$$\boxed{u_B(d) = \sqrt{u^2{}_B(d_1) + u^2{}_B(d_2) + 2u_B(d_1)u_B(d_2)}}$$

$$u_B(d_1) = \frac{\delta_{1dov}}{\sqrt{3}}, \delta_{1dov} = \delta_1 + \delta_2 l_1 \text{ ; } u_B(d_1) = \frac{2{,}8}{\sqrt{3}} = 1{,}616 mm, \delta_{1dov} = 1 + 2 * 0{,}9 = 2{,}8$$

$$u_B(d_2) = \frac{\delta_{2dov}}{\sqrt{3}}, \delta_{2dov} = \delta_1 + \delta_2 l_2 \text{ ; } u_B(d_2) = \frac{2{,}2}{\sqrt{3}} = 1{,}270 mm, \delta_{2dov} = 1 + 2 * 0{,}6 = 2{,}2$$

$$\boxed{u_B(d) = \sqrt{1{,}616^2 + 1{,}270^2 + 2 * 1{,}616 * 1{,}270}}$$

$$\underline{u_B(d) = 2{,}886 \quad mm}$$

5.4 Standardní nejistota výsledku C – celková (kombinovaná)

Obecný vztah (vycházející ze vztahu 3.17, 4.16):

$$\boxed{u_C(d) = \sqrt{u^2{}_A(d) + u^2{}_B(d)}}$$

$$\boxed{u_C(d) = \sqrt{0{,}29059^2 + 2{,}886^2}}$$

$$\underline{u_C(d) = 2{,}900 mm}$$

VÝSLEDEK + ZÁVĚR:

Za hlavní výsledek se považuje KOMBINOVANÁ NEJISTOTA (skládá se z nejistoty typu A a B):

$$u_C\,(d) \cong 2,9\ \text{mm}$$

Výsledek:

Výsledek opakovaného měření délky stolu je $d = 1\,503,2$ mm s $u_c = 2,9$ mm

Závěr:

Změřit délku cca 1,5 m normálním měřítkem s rozlišením 1 mm s výslednou nejistotou cca ± 2,9 mm bývá obvyklé.

5.5 Zobecněný formulář pro automatické vyhodnocení nejistot v Excelu

Opakované použití jediného měřidla je asi nejčastějším případem praxe nepřímých měření, takže i součástí této práce je zobecněný „formulář" v excelu pro „automatické" vyhodnocování nejistot takového měření. Cílem je získání výsledné hodnoty a její nejistoty, za předpokladu, že známe jednotlivé naměřené hodnoty a jsou dostatečně deklarovány podmínky měření – kvantifikovány jednotlivé základní zdroje nejistot – Standardní nejistota metodou A, kovariance určená metodou typu A, Standardní nejistota metodou B (rozlišení/přesnost měřidla a další aditivní složka chyby v závislosti na velikosti měřené délky), Standardní nejistota výsledku C – celková (kombinovaná), která se skládá z nejistoty A a z nejistoty B.

Předpokládáme, že další negativní složky se neprojeví (výraznější odchylka teplot apod.). Pro zjednodušení je napevno naprogramován požadavek 10-ti opakování měření, což je v souladu s požadavkem norem (ČSN ENV 13005, GUM – Guide to the Expression of Uncertainty in Measurement) pro vyhodnocení složek nejistot stanovovaných metodami typu A, typu B a nejistota celkového výsledku C (kombinovaná).

Větší variantnost počtu měření a dalších je samozřejmě možná, ale pro jisté rozpory s výše uvedenými předpisy a následné řešení speciálními postupy v praktické příloze řešeny nejsou.

Důvody pro vybrání aplikace Microsoft Office Excel:

- Jednoduché intuitivní ovládání a obsluha jak samotné aplikace, tak samotného formuláře
- Minimální hardwarové požadavky a to jak na hardware, tak také na software
- Dobré editační možnosti

Vstupní hodnoty měřené délky:

d (jmenovitá hodnota) = [ ] mm

d1 (jmenovitá hodnota) = [ ] mm …… **HODNOTY NA VKLÁDÁNÍ!!!!!**

d2 jmenovitá hodnota = [ ] mm

d = d1 + d2

Měření se opakuje 10x a to za stejných podmínek, další vlivy na samotné měření se zanedbávají (teploty apod.)
Dále se provede rozdělení měřeného prvku, v tomto případě na dvě sekce o určitých jmenovitých hodnotách
a to d1 mm a d2 mm modelem daného měření bude součet daných sekcí, které můžeme rozdělit na d1 a d2 a
celkový součet těchto sekcí bude d=d1+d2.

Tabulka - Naměřené hodnoty délky: **n = 10 - počet měření**

Číslo měření	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
d_1 (mm)	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
d_2 (mm)	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$d = d_1 +$ (mm)	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Obr. 5.1 Ukázka zobecněného formuláře v aplikaci Microsoft Office Excel – zadávání hodnot

Za hlavní výsledek se považuje KOMBINOVANÁ NEJISTOTA (skládá se z nejistoty typu A a B):

Výsledek se zapisuje ve tvaru d (aritmetický průměr) + u_C (kombinovaná nejistota)

d [0] **mm** s **u_C** [0] **mm**

(Např. takto: d = 1 503, 2 mm s uC = 2, 9 mm)

POJIŠTĚNÍ NA 95 % SPOLEHLIVOSTI VÝSLEDKU:

Většinou se nahrazuje nejistota standardní nejistotou kombinovanou, ale lze ji rozšířit s pojištěním spolehlivosti a to v oboru měření délek.

KOEFICIENT ROZŠÍŘENÍ: k_r [**2**]

U(l) = kr x uC (d) = [0] **mm**

(Např. takto:d = (1 502,8 ± 4,8) mm

Obr. 5.2 Ukázka zobecněného formuláře v aplikaci Microsoft Office Excel – výsledné nejistoty

Ukázkový příklad a zobecněný formulář vytvořený v aplikaci Microsoft Office Excel, je uložen jako soubor a v něm 2 pracovní listy (záložky) na přiloženém datovém médiu – DVD médium.

6 ZÁVĚR

Tato bakalářská práce si dává za cíl zasvětit budoucího čtenáře do základních pojmů, definic z oblasti metrologie, měření, chyb měření a hlavně do nejistot měření při nepřímém měření. Kromě tohoto cíle je její součástí ukázkový příklad délkového měření na výpočet nejistot při nepřímém měření a další součástí ve formě přílohy je zobecněný „formulář“ pro „automatické“ vyhodnocování nejistot takového měření, obě tyto součástí jsou vytvořeny v aplikaci Microsoft Office Excel jako samostatné listy v souboru.

Hlavní náplní vlastní práce je analýza nejistot měřeni za použití jediného měřidla pro opakované měření je asi nejčastějším případem praxe nepřímých měření, kdy známé jmenovité hodnoty samostatných úseků a celkovou jmenovitou hodnotu měřeného prvků. Je napevno naprogramován požadavek 10-ti opakování měření, což je v souladu s požadavkem norem ČSN ENV 13005 (GUM – Guide to the Expression of Uncertainty in Measurement) pro vyhodnocení složek nejistot stanovovaných metodami typu A, typu B a nejistota celkového výsledku C (kombinovaná). Dále se vypočítají aritmetické průměry, směrodatná odchylka základního souboru, směrodatná odchylka výběrového souboru, pak se provede výpočet nejistoty stanovované metodami typu A, typu B a nejistotu celkového výsledku C (kombinovaná) a u zobecněného „formuláře“ i s koeficientem rozšíření, tedy pojištění na 95% spolehlivosti výsledku.

Ukázkový příklad vytvořený v (Excelovském) sešitě vyšel při opakovaném měření délky stolu d = (1 503,2 ± 2,9) mm nebo s jiným zápisem d = 1 503, 2 mm s u_c = 2, 9 mm. Závěrem lze říci, že měřit délku cca 1,5 m normálním měřítkem (svinovací metr) s rozlišením 1 mm s výslednou nejistotou cca ± 2,9 mm bývá obvyklé.

Varianta obecného (Excelovského) sešitu může tedy posloužit pro praktické procvičení analýzy nejistot např v BS v předmětu Technické měření. Stačí nějaká členitá součást, u níž je patrná výsledná délka, složená ze dvou úseků a studenti si mohou ověřit prakticky velikost nejistot měření při opakovaném použití svinovacího metru, posuvky, pravítka apod. Kovariance stanovená metodou typu A bývá v praxi velmi malá, proto je možné ji zanedbat a nepočítat s ní. Pro praktické procvičování a pro školní potřebu je zařazena do výpočtu a to pro použití v obecném (Excelovském) sešitě.

Nepřímá měření mají v metrologii dnes i v budoucnu své místo a jejich využití v teorii i v praxi je velmi časté především za využití opakovaného použití jediného měřidla. Opakované použití jediného měřidla je asi nejčastějším případem praxe nepřímých měření, ale současně jsou spojeny s podstatně složitějším zajištěním jejich přesnosti – výslednou nejistotou měření.

7 LITERATURA

[1] CHUDÝ, V.; Palenčár, R.; Kureková, E.; Halaj, M.; Meranie technických veličín: 1. vydání Bratislava: Vydavatelstvo STU, 1999. 688s. ISBN 80-227-1275-2.

[2] KOSTÚR, K.; Laciak, M.; Truchlý, M.; Sytémy nepriameho merania: 1. vydání Košice: Reprocentrum Košice, 2005. 173 s. ISBN 80-8073-273-6.

[3] Palenčár, R.; Modely merania při zabezpečovaní kvality.: 1. vydání Bratislava: Vydavatelstvo STU, 1998. 140 s. ISBN 80-227-1170-5.

[4] Vdoleček, F.; Technická měření; Studijní opory, VUT Brno, 2002. 64 s.

[5] Palenčár, R; Vdoleček, F.; Halaj. M.: Nejistoty v měření I: vyjadřování nejistot, Automa 7, 2001, č. 7-8, strana 50-54.

[6] Palenčár, R; Vdoleček, F.; Halaj. M.: Nejistoty v měření II: nejistoty přímých měření, Automa 7, 2001, č. 10, strana 52-56.

[7] Palenčár, R; Vdoleček, F.; Halaj. M.: Nejistoty v měření III: nejistoty nepřímých měření, Automa 7, 2001, č. 12, strana 28-33.

[8] Palenčár, R; Vdoleček, F.; Halaj. M.: Nejistoty v měření IV: nejistoty při kalibraci a ověřování, Automa 8, 2002, č. 3, strana 41-47.

[9] Palenčár, R; Vdoleček, F.; Halaj. M.: Nejistoty v měření V: od teorie k praxi, Automa 7, 2002, č. 5, strana 42-45.

[10] Guide to the Expression of Uncertainty in Measurement (Směrnice pro vyjadřování nejistoty při měření), BIPM, IEC, IFCC, ISO, IUPAC, IUPAP, OIML, 1995.

[11] ČSN ENV 13005 Pokyn pro vyjádření nejistoty měřeni, ČNI 2005

[12] Harwot, L.: Chyba měření - nejistota měření [online]. 2006. [cit. 2007-10-25]. Dostupné z: <http://www.amt.cz/index.php?id=CL_CHYB>

[13] Zahrádka, P.: Nejistoty měření [online]. 22-10-2006. [cit. 2007-10-25]. Dostupné z: < http://www.designtech.cz/c/caq/>

[14] Kapitola 6. Měření délek [online]. 2008. [cit. 2008-03-17]. Dostupné z: <http://gis.zcu.cz/studium/gen1/html/ch06s01.html>,<http://gis.zcu.cz/studium/gen1/html/ch06s02.html>

8 SEZNAM PŘÍLOH

Příloha č. 1 – Ukázkový příklad v aplikaci Microsoft Office Excel jako jeden z listů v souboru;
Příloha č. 2 – Zobecněný formulář v aplikaci Microsoft Office Excel jako jeden z listů v souboru;
Příloha č. 3 – Přiložené DVD;

- Ukázkový příklad s vyhodnocením nejistot (model vybraného příkladu);
- Zobecněný formulář pro automatické vyhodnocení nejistot;
- Bakalářská práce ve formátu .doc;
- Bakalářská práce ve formátu .pdf;